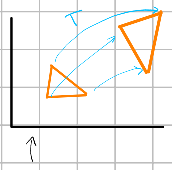
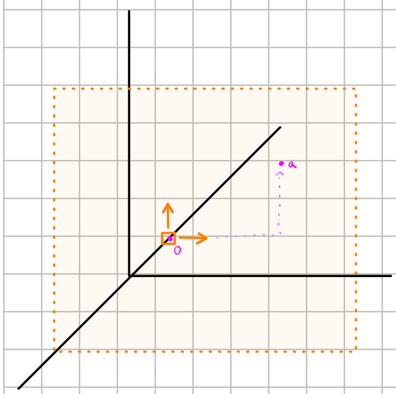
Affin-lineare Transformationen als lineare Transformationen auf dem projektiven Raum

Wir haben folgendes Problem:



Wir möchten eine Matrix $\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ finden, sodass wir affin-lineare Transformationen im $\mathbb{R}^n$ dadurch darstellen können.

Beispielhaft für $n=2$ und T eine affin-lineare Transformation.



Wir könnten hierzu auf die Idee kommen den $P\mathbb{R}^n \xleftarrow{\pi} \mathbb{R}^{n+1}$ zu verwenden.

Doch sind $M \in PGl_n(\mathbb{R})$ wirklich affin-linearen Transf.?

Wenn $M \in Gl_n(\mathbb{R})$ so muss M affin-linear sein mit affinen Teil $a=0$.

Wir dehomogenisieren $P\mathbb{R}^n$ entlang von $\hat{e}_{n+1}$

Angenommen πM soll 0 auf a schicken,

$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ a \end{matrix} \xrightarrow{\pi^{-1}} \begin{matrix} e_{n+1}\mathbb{R} \\ a\mathbb{R} \end{matrix} \right\}$, somit muss nur e_{n+1} auf a geschickt werden von M.

Also: $M = \left[\begin{matrix} \cdots & \cdots & \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} \\ & & 1 \end{matrix} \right] \begin{matrix} \}n \leftarrow \text{Zeilen} \\ \}1 \leftarrow \text{letzte Zeile zum erhalten der Skalierung.} \end{matrix}$

$\uparrow$ $n+1$ Spalte.

Ist dies nun eine affin. Transformation? Sei nun $b \in \mathbb{R}^n$.

$b \xrightarrow{\pi^{-1}} b\mathbb{R}$, somit gilt:

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, mapsto, "+a"] \arrow[d, mapsto, "\pi^{-1}"] & a+b \\
b\mathbb{R} \arrow[r, mapsto, "M"] & (Mb)\mathbb{R} \arrow[u, mapsto, "\pi"]
\end{tikzcd}$$

$b\mathbb{R} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \\ 1 \end{pmatrix}\mathbb{R}$ $\qquad$ $(Mb)\mathbb{R} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ \vdots \\ b_n + a_n \\ 1 \end{pmatrix}\mathbb{R}$